تمرين 6:

لتكن $I$ مثالية في الشبكة $E$ نعرف العلاقة $R$ في $E$ بالشكل الآتي

$$\forall\ xRy \Leftrightarrow \exists a \in I\ ;\ x \vee a = y \vee a$$

a) برهن أن $R$ علاقة تكافؤ في $E$ ونرمز بـ $E/_I$ لمجموعة القسمة

b) برهن أن العلاقة $R$ متوافقة مع العملية $\vee$ أي أنه إذا كان :

$$xRx',\ yRy' \Rightarrow (x \vee y)R(x' \vee y')$$

c) استنتج أنه يمكن بناء ونص شبكة عليا على $E/_I$

d) إذا كانت $E$ توزيعية برهن أن $R$ أيضاً متوافقة مع $\wedge$ ومنه استنتج بناء شبكة القسمة $E/I$

الحل:

a) $R$ انعكاسية $\forall x \in E\ \forall a \in I\ ;\ x \vee a = x \vee a \Rightarrow xRx$

$\forall x, y \in E\ ;\ xRy \Rightarrow \exists a \in I\ ,\ x \vee a = y \vee a \Rightarrow \exists a \in I$

$R$ تناظرية $\Rightarrow y \vee a = x \vee a \Rightarrow yRx \Rightarrow$

$\forall x, y, z \in E\quad xRy\ \&\ yRz \Rightarrow \exists a, b \in I\ ;\ a \vee x = a \vee y\ \&\ b \vee y = b \vee z$

$x \vee (a \vee b) = (x \vee a) \vee b = (y \vee a) \vee b = (y \vee b) \vee a = (b \vee z) \vee a$
$= z \vee (a \vee b)$

بما أن $a \vee b \in I$ فيكون $xRz$ وبالتالي فإن $R$ متعدية ومنه نستنتج أن $R$ علاقة تكافؤ في $E$

b) نفرض أن $xRx'$ & $yRy' \Leftarrow$ يوجد $a, b \in I$ بحيث يكون

$x \vee a = x' \vee a$ & $y \vee b = y' \vee b$

$(x \vee y) \vee (a \vee b) = (x \vee a) \vee (y \vee b) = (x' \vee a) \vee (y' \vee b)$
$= (x' \vee y') \vee (a \vee b)$

بما أن $a \vee b \in I$ نستنتج حسب تعريف علاقة التكافؤ $(x \vee y) R (x' \vee y')$

c) إذا عرفنا $E/_I$ العملية $\underline{\vee}$ بالشكل التالي

$$\tilde{x} \underline{\vee} \tilde{y} = \widetilde{x \vee y}$$

الجامدية $\tilde{x} \underline{\vee} \tilde{x} = \widetilde{x \vee x} = \tilde{x}$

التبديلية $\forall \tilde{x}, \tilde{y} \in E/_I ; \tilde{x} \underline{\vee} \tilde{y} = \widetilde{x \vee y} = \widetilde{y \vee x} = \tilde{y} \underline{\vee} \tilde{x}$

$$\forall \tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z} \in E/_I ; \tilde{x} \underline{\vee} (\tilde{y} \underline{\vee} \tilde{z}) = \tilde{x} \underline{\vee} (\widetilde{y \vee z}) = \widetilde{x \vee (y \vee z)}$$
$$= \widetilde{(x \vee y) \vee z}$$
$$= (\widetilde{x \vee y}) \underline{\vee} \tilde{z} = (\tilde{x} \underline{\vee} \tilde{y}) \underline{\vee} \tilde{z}$$

ومنه $E/_I$ شبكة علياً حيث $\tilde{x} \leq \tilde{y}$ $\tilde{x} \underline{\vee} \tilde{y} = \tilde{y} \iff$

d) نفرض أن $E$ توزيعية وأن $x R x'$ و $y R y'$ فإنه يوجد $a, b \in I$ حيث يكون $x \vee a = x' \vee a$ و $y \vee b = y' \vee b$

$E$:

$$(x \wedge y) \vee (a \vee b) = (x \vee a \vee b) \wedge (y \vee a \vee b) = ((x \vee a) \vee b) \wedge ((y \vee b) \vee a)$$

لأنه عنصر متوزع

$$= ((x' \vee a) \vee b) \wedge ((y' \vee b) \vee a) = (x' \vee (a \vee b)) \wedge (y' \vee (a \vee b))$$
$$= (x' \wedge y') \vee (a \vee b)$$

وبما أن $a \vee b \in I$ نستنتج أن $(x \wedge y) R (x' \wedge y')$ أي أن $R$ متوافقة مع $\wedge$

في حالة $E$ توزيعية

نعرف على $E/_I$ قانون تشكيل آخر هو $\tilde{x} \underline{\wedge} \tilde{y} = \widetilde{x \wedge y}$ $\forall \tilde{x}, \tilde{y} \in E/_I$

بنفس الطريقة نبرهن أن قانون التشكيل هذا يحقق الخواص التالية:

الجمعية، التبديلية، الجامدية، الماصية وبالإضافة إلى ذلك

$$\forall \tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z} \in E/_I \quad \tilde{x} \underline{\wedge} (\tilde{x} \underline{\vee} \tilde{y}) = \tilde{x} \underline{\wedge} (\widetilde{x \vee y}) = \widetilde{x \wedge (x \vee y)}$$

أي أن الخاصة الماصية محققة وبالتالي $E/_I$ تكون شبكة

## الحلقات البوليانية:

نقطة البداية لهذا الفصل ستكون الشبكة التوزيعية والمتممة أو شبكة بول وسنبين أن بناء شبكة بول يكافئ بناء خواص الحلقة وهي حلقة بول (حلقة واحدية تحقق $x = x^2$ حيث $\forall$ أي عنصر من عناصرها) وبعد ذلك نبرهن هذا التكافؤ. موضوع هذا الفصل سيخصص في دراستها لخواص والمفاهيم الواردة في الفصل السابق ولكن على الحلقات البوليانية مثل المورفيزمات، الحلقات الجزئية، المرشحات والمثاليات

### شبكة بول:

تسمى الشبكة التي تكون ذات عناصر واحد توزيعية ومتممة هي شبكة بول

### ملاحظات:

لاحظ أن شبكة بول تملك دوماً العنصر الأصغر $0$ والعنصر الأكبر $1$ وأن أي عنصر $x$ فيها يملك متمم واحد $x'$ بحيث يكون $x \vee x' = 1$ و $x \wedge x' = 0$

ويكون أيضاً من أجل كل $[a,b]$ في $E$ أي عنصر $x$ من هذا المجال يملك متمم نسبي واحد فقط في $[a,b]$ ويكون $y = (a \vee x') \wedge b$

### مثال:

كل شبكة $(\mathcal{P}(E), \subseteq)$ تكون شبكة بول (لأنها شبكة واحدية وتوزيعية ومتممة ولكل عنصر متمم)

بعض الخواص البسيطة في شبكة بول:

$1' = 0$ (متمم)

$0' = 1$

من أجل أي $x \in E$ فإن $x = (x')'$ [illegible]

من أجل أي عنصرين $x, y \in E$ فإن $(x \wedge y)' = x' \vee y'$ و $(x \vee y)' = x' \wedge y'$

وهاتين المساواتين تدعيان قانوني ديمورغان ويمكن البرهان عليهما بسهولة

$$(x \wedge y) \wedge (x' \vee y') = (x \wedge y \wedge x') \vee (x \wedge y \wedge y') = (0 \wedge y) \vee (x \wedge 0)$$
$$= 0 \vee 0 = 0$$

$$(x \wedge y) \vee (x' \vee y') = (x \vee x' \vee y') \wedge (y \vee x' \vee y') = (1 \vee y') \wedge (1 \vee x') = 1 \wedge 1 = 1$$

أي أن كل عنصر متمم الآخر $(x \wedge y)' = x' \vee y'$

$$x \vee y = (x' \wedge y')' = (x' \wedge y')' \Rightarrow (x \vee y)' = [(x' \wedge y')']' = x' \wedge y'$$

$$(x \vee y)' = x' \wedge y'$$

الجمع:

لنعرف في شبكة بول عملية جديدة هي الجمع بالشكل الآتي

$$x + y = (x \wedge y') \vee (x' \wedge y) \quad \text{---} \quad (1)$$

مثال:

في الشبكة $(P(E), \subseteq)$ عملية الجمع هي عبارة عن الفرق التناظري.

$$X \Delta Y = (X \wedge C_Y) \cup (C_X \cap Y)$$

يمكن كتابة (1) بالشكل

$$x + y = [(x \wedge y') \vee x'] \wedge [(x \wedge y') \vee y]$$
$$= (x \vee x') \wedge (y' \vee x') \wedge (x \vee y) \wedge (y' \vee y)$$
$$= 1 \wedge (y' \vee x') \wedge (x \vee y) \wedge 1$$
$$= (x \vee y) \wedge (y' \vee x')$$
$$x + y = (x \vee y) \wedge (x' \vee y')$$

ومن (1) يمكن أن نكتب:

$$(x + y)' = (x' \vee y) \wedge (x \vee y') \quad \text{---} \quad (1)'$$

ومن (2) يمكن أن نكتب

$$(x + y)' = (x \wedge y) \vee (x' \wedge y') \quad \text{---} \quad (2)'$$

إن عملية الجمع تحقق الخواص التالية:

a) تبديلية

b) تقبل 0 كعنصر حيادي

$$x + 0 = (x \wedge 1) \vee (x' \wedge 0) = x \vee 0 = x$$

c) كل x عنصر نظير نفسه:

$$x + x = (x \wedge x') \vee (x' \wedge x) = 0 \vee 0 = 0$$